

Description des travaux récents 2022 - 2026

État de l'art, influence de la géométrie et propagation de singularités

Les équations aux dérivées partielles d'évolution modélisent de nombreux phénomènes de propagation d'ondes. Leur comportement dépend à la fois de la nature de l'équation, des non-linéarités et de la géométrie du milieu. Si ces questions sont aujourd'hui bien comprises dans l'espace libre, la présence d'un bord ou d'une interface, pourtant omniprésente dans les applications, soulève encore de nombreuses difficultés mathématiques.

Mes recherches portent sur l'influence de la géométrie, et plus particulièrement du bord, sur la propagation, la dispersion et la concentration des ondes. Les réflexions successives sur le bord peuvent engendrer des phénomènes de focalisation (caustiques) qui modifient profondément le comportement des solutions. Comprendre ces mécanismes est essentiel aussi bien pour des questions fondamentales, telles que la localisation des fonctions propres ou l'ergodicité quantique, que pour des applications où l'on cherche à contrôler la propagation des ondes, par exemple dans les fibres optiques.

J'étudie ainsi des estimations de dispersion et de type Strichartz pour les équations d'ondes et de Schrödinger, ainsi que les phénomènes de concentration des fonctions propres, des quasimodes et des projecteurs spectraux. Ces différents problèmes sont intimement liés : les pertes de dispersion semblent provenir des phénomènes de focalisation des rayons, tandis que la compréhension fine des réflexions sur le bord est indispensable pour décrire la concentration des hautes fréquences.

L'objectif de mes recherches est de comprendre comment la géométrie d'un domaine gouverne la propagation des ondes, depuis l'analyse microlocale de leurs singularités jusqu'aux applications aux équations dispersives non linéaires.

État de l'art Les équations des ondes et de Schrödinger constituent les prototypes des équations hyperboliques et dispersives. L'étude des modèles non linéaires repose en grande partie sur une compréhension fine du flot linéaire, notamment de ses propriétés de dispersion, de régularisation et des estimations de Strichartz. Dans l'espace euclidien, ces propriétés sont aujourd'hui bien comprises grâce aux formules explicites disponibles. Depuis les années 1990, des progrès importants ont également été obtenus sur les variétés sans bord, où l'analyse repose sur la construction de paramétrices adaptées à la géométrie (travaux de Bourgain, Staffilani-Tataru, Burq-Gérard-Tzvetkov, Smith, Tataru, Klainerman-Rodnianski, entre autres).

La situation est beaucoup moins satisfaisante en présence d'un bord. Les meilleures estimations connues restent souvent non optimales, en particulier parce que les approches existantes réduisent le problème à une variété sans bord munie d'une métrique peu régulière ou ne permettent de traiter qu'une seule réflexion sur le bord. Elles ne capturent donc pas les phénomènes les plus délicats, liés aux réflexions multiples et à la formation de caustiques.

En l'absence de bord, la propagation des ondes est décrite par des paramétrices construites à partir d'intégrales oscillantes dont les fonctions de phase reflètent directement la géométrie du milieu. Les points critiques dégénérés de ces phases correspondent aux phénomènes de focalisation des rayons et expliquent les pertes observées dans les estimations dispersives.

En présence d'un bord, les réflexions successives des rayons introduisent de nouveaux mécanismes de concentration. Des rayons issus d'une même source peuvent se reconcentrer après plusieurs réflexions et former des caustiques, modifiant profondément la dispersion des ondes. Ces phénomènes constituent aujourd'hui le principal obstacle à l'obtention d'estimations optimales.

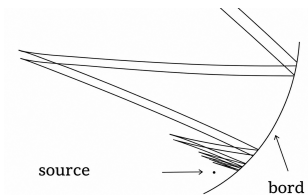
Le cadre géométrique de cette analyse a été établi par les travaux fondateurs de Melrose et Sjöstrand sur la propagation des singularités au voisinage du bord. Ils introduisent les rayons bicaractéristiques généralisés, qui prolongent les rayons de l'optique géométrique classique et permettent de décrire de manière unifiée les différents comportements possibles des rayons : réflexion transverse, diffraction, rayons glissants et limites de

réflexions multiples. Cette description géométrique est désormais le point de départ de l'analyse microlocale des équations d'ondes dans les domaines à bord.

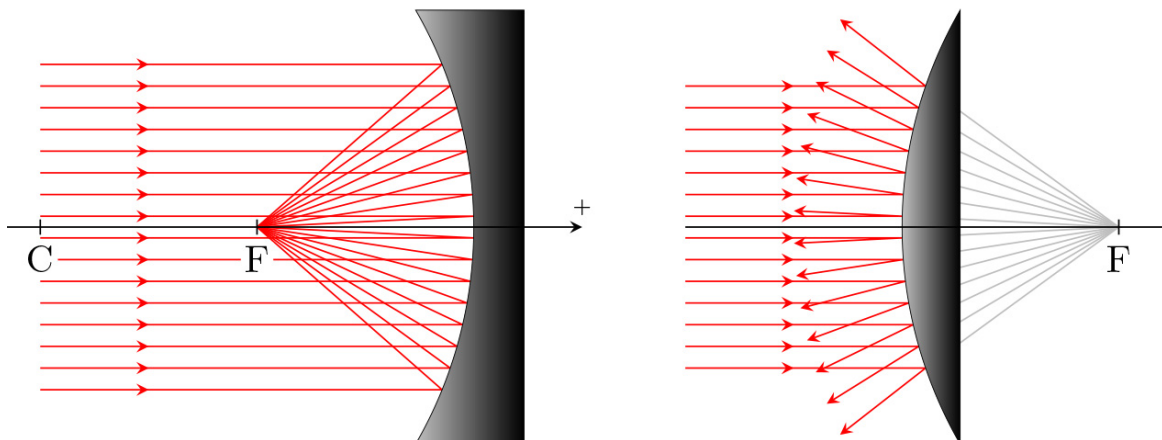


Dans l'espace libre le front d'onde issu d'une source ponctuelle est la sphère de rayon $|t|$ (où t désigne le temps écoulé), centrée au point source. Les singularités se propagent le long de ce front, perpendiculairement aux rayons optiques. Cette description reste valable tant que les rayons optiques ne se recoupent pas ; leur focalisation conduit alors à la formation de caustiques.

En présence d'un bord, les réflexions successives déforment le front d'onde et peuvent créer des caustiques, où l'énergie se concentre. L'image de droite illustre ce phénomène après seulement cinq réflexions.



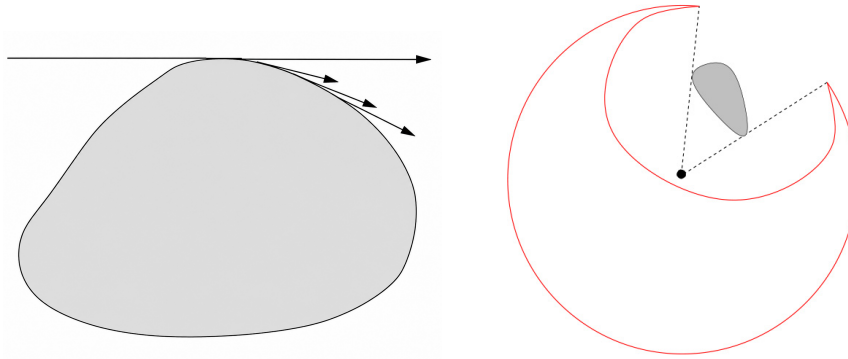
À haute fréquence, l'énergie suit les rayons géométriques ; la dispersion est donc étroitement liée à la géométrie de leur flot. En présence d'un bord, les réflexions successives peuvent provoquer la formation de caustiques, où des rayons se reconcentrent et ralentissent la dispersion. On distingue ainsi deux situations fondamentales : les domaines géodésiquement convexes et les domaines géodésiquement concaves.



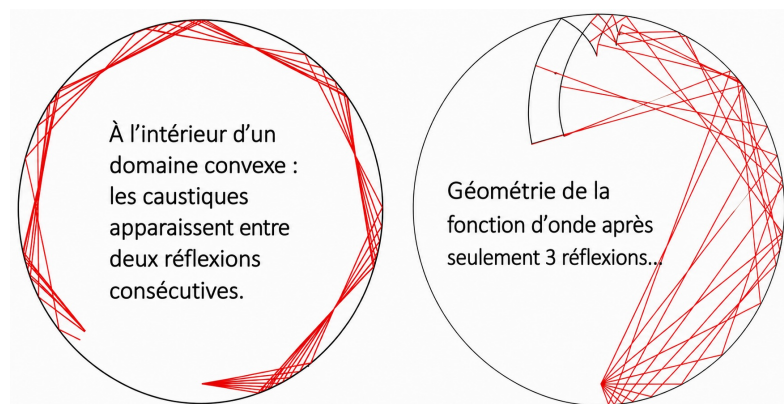
À l'intérieur d'une parabole : la taille de l'onde diminue et sa norme L^∞ augmente.

L'analyse des effets dispersifs passe par une description précise de la géométrie du front d'onde. On distingue plusieurs situations:

- *rayon transverse* : le rayon se réfléchit selon les lois de l'optique géométrique, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, comme une balle de billiard. C'est la situation la plus simple.
- *rayon tangent à un obstacle strictement convexe* : au voisinage d'un rayon tangent à un obstacle strictement convexe, une partie de l'énergie peut se propager le long du bord et produire des effets diffractifs (comme au point de Poisson-Arago). Le front d'onde est constitué d'une partie directement propagée et d'une partie réfléchi selon les lois de l'optique géométrique.



- *rayons multiples dans un domaine strictement convexe* : le front d'onde, c'est-à-dire le lieu des points atteints après un temps t , peut rapidement développer des singularités dont la structure dépend de la fréquence et de la distance de la source au bord. Il peut alors apparaître un nombre arbitrairement grand de caustiques (cusps et queues d'aronde).



Dans [OI7], nous obtenons la première description précise de l'amplitude de la solution fondamentale après un nombre arbitrairement grand de réflexions.

- *rayon tangent avec contact d'ordre ≥ 3* : Si le contact est d'ordre ∞ , il n'est même pas clair quelle devrait être la continuation d'un rayon... (ex. sur l'exemple de Taylor (1976) on peut distinguer plusieurs continuations possibles d'un rayon donné qui touche un bord à un point de contact d'ordre infini).

La propagation des singularités... et ses limites Le théorème de propagation des singularités de Melrose et Sjöstrand constitue l'un des résultats fondateurs de l'analyse microlocale des problèmes à bord. Il affirme que les singularités se propagent le long des rayons bicaractéristiques généralisés. Issu des travaux pionniers de Morawetz sur le scattering, ce résultat est devenu un outil fondamental, notamment en théorie du contrôle où il intervient dans le théorème de contrôlabilité exacte de Bardos, Lebeau et Rauch.

Cependant, cette théorie repose sur des estimations d'énergie et décrit uniquement la trajectoire des singularités. Elle ne fournit pas d'information quantitative sur leur structure ni sur la séparation des paquets d'ondes qui se propagent dans des directions différentes. Or cette séparation est précisément le mécanisme responsable de la dispersion. Pour établir des estimations dispersives optimales, il faudrait disposer d'une version quantitative de la propagation des singularités, à la précision imposée par le principe d'incertitude.

En l'absence de telles paramétrises, une approche très différente a été développée par Smith et Sogge. L'idée consiste à transformer le problème à bord en un problème sans bord muni d'une métrique lipschitzienne, puis à travailler sur des intervalles de temps suffisamment courts pour qu'un rayon ne rencontre le bord qu'une seule fois. Cette méthode a permis des progrès majeurs sur des domaines très généraux.

Sa principale limitation est cependant qu'elle élimine précisément les phénomènes de réflexions multiples responsables de la formation des caustiques. Elle ne décrit donc pas la dispersion dans les directions tangentielles au bord et ne permet pas, en dimension supérieure, d'obtenir des estimations dispersives optimales.

En résumé, la théorie classique explique où se propagent les singularités, mais pas comment elles se séparent. C'est précisément cette information quantitative qui est au coeur de mes travaux.

Les équations étudiées On s'intéresse donc aux propriétés dispersives des solutions d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, dont les prototypes sont les équations des ondes et de Schrödinger.

Les estimations de Strichartz mesurent la taille et la dispersion des solutions de l'équation des ondes linéaire sur un domaine Ω avec bord $\partial\Omega$ (possiblement vide):

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u(t, x) = 0, & x \in \Omega \\ u|_{t=0} = u_0, \partial_t u|_{t=0} = u_1, u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

Ici Δ désigne l'opérateur de Laplace sur Ω . Si $\partial\Omega \neq \emptyset$, on considère donc la condition de Dirichlet (un certain nombre de mes résultats peuvent être étendus au cas de la condition de Neumann $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0$).

Les inégalités de Strichartz peuvent aussi concerner la version quantique de (0.1), c'est-à-dire de l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)v(t, x) = 0, & x \in \Omega \\ v|_{t=0} = v_0, v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

Pour étudier les perturbations non linéaires de ces équations, il est indispensable de contrôler la taille du flot linéaire en fonction des données initiales. Pour l'équation des ondes non linéaires ou l'équation de Schrödinger non linéaire, les normes mixtes $L_t^q L^r(\Omega)$ sont particulièrement utiles : au prix d'une moyenne en temps on obtient un gain d'intégrabilité en espace, parfois jusqu'à $r = \infty$, pour des données qui ont une régularité Sobolev qui ne les placerait pas dans $L^r(\Omega)$ par simple injection de Sobolev.

L'équation des ondes (0.1) Une estimation (locale) classique indique que sur toute variété Riemannienne Ω sans bord, la solution linéaire de (0.1) vérifie (pour $T < \infty$)

$$h^\beta \|\psi(hD_t)u\|_{L^q([0,T], L^r(\Omega))} \leq C \left(\|u_0\|_{L^2} + \|hu_1\|_{L^2} \right), \quad (0.3)$$

où $\psi \in C_0^\infty$ est une fonction lisse à support inclus dans un voisinage de 1 ($\psi(hD_t)$ est donc un multiplicateur de Fourier dans la variable temporelle, qui, sur la solution des ondes, est également une troncature spectrale). Si d désigne la dimension de la variété, β est donné par la condition d'échelle $\beta = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{q}$, où le couple (q, r) est dit admissible pour l'équation des ondes, c.a.d.:

$$\frac{2}{q} + \frac{d-1}{r} \leq \frac{d-1}{2}, \quad q \geq 2, \quad (d, q, r) \neq (3, 2, \infty). \quad (0.4)$$

Si Ω désigne l'espace $\mathbb{R}^d$ avec la métrique euclidienne $g_{i,j} = \delta_{i,j}$, la solution $u_{\mathbb{R}^d}(t, x)$ de (0.1) dans $\mathbb{R}^d$ avec $(u_0 = \delta_a, u_1 = 0)$ a une forme explicite donnée par la formule

$$u_{\mathbb{R}^d}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \cos(t|\xi|) e^{i(x-a)\xi} d\xi.$$

L'inégalité (0.3) a été démontrée par R.H.Strichartz [63] dans le cas particulier $q = r$ et ensuite établie par J.Ginibre et G.Velo [22, 24] pour des paires admissibles (q, r) avec $q > 2$ (voir également H.Lindblad et C.Sogge [42], ainsi que L.Kapitanski [31] dans le cas d'une métrique variable). Le point limite $q = 2$ a été montré par M.Keel et T.Tao [33]. En dimension $d = 3$, les paires extrémales ne sont pas admissibles et

l'estimation (0.3) est fausse: on obtient une perte logarithmique de dérivées dans les estimations de Strichartz.

La démarche classique pour démontrer (0.3) est d'utiliser une estimation plus forte, à temps fixé, qu'on appelle estimation de dispersion :

$$\|\chi(hD_t)u_{\mathbb{R}^d}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-1}{2}}\}. \quad (0.5)$$

L'interpolation entre (0.5) et l'estimation de l'énergie, suivie d'un argument classique de dualité dit TT^* , permet d'obtenir facilement les estimations (0.3) (pour $q > 2$). Ces estimations peuvent être généralisées à toute variété (Ω, g) régulière sans bord grâce à leur caractère local (vitesse de propagation finie). Les estimations (0.3) sont optimales sur une telle variété Riemannienne.

L'équation de Schrödinger (0.2) Dans le cas de l'équation de Schrödinger (0.2), les estimations de Strichartz locales s'écrivent, dans leur plus grande généralité, comme suit: si on note $e^{it\Delta}$ le flot linéaire, il vérifie

$$\|e^{it\Delta}v_0\|_{L^q(0,T)L^r(\Omega)} \leq C_T\|v_0\|_{H^\sigma(\Omega)}, \text{ où } 2 \leq q, r \leq \infty \quad (0.6)$$

vérifient la condition d'admissibilité pour Schrödinger, $\frac{2}{q} + \frac{d}{r} = \frac{d}{2}$, $(d, q, r) \neq (2, 2, \infty)$, $\sigma \geq 0$. Si on se place dans le cadre $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec métrique plate alors, grâce à la transformée de Fourier, on obtient la forme exacte de la solution de (0.2)

$$v_{\mathbb{R}^d}(t, x) = \frac{1}{4\pi i |t|^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} v_0(y) dy. \quad (0.7)$$

L'inégalité de Strichartz pour l'équation de Schrödinger (0.2) s'écrit comme suit : soit (q, r) une paire d -admissible pour l'équation de Schrödinger en dimension $d \geq 2$. Si $v_{\mathbb{R}^d}(t, \cdot) = e^{it\Delta_{\mathbb{R}^d}}v_0$ est solution de (0.2) avec donnée initiale $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v_{\mathbb{R}^d}\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d))} \leq C\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (0.8)$$

Les inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger dans le cadre euclidien ont été établies par R.H.Strichartz et généralisées par J.Ginibre et G.Velo [22, 23], T.Kato [32], T.Cazenave et F.Weissler [15], etc, qui les ont ensuite utilisées pour montrer des résultats d'existence globale pour l'équation semi-linéaire avec non-linéarité polynomiale. Comme pour l'équation des ondes, elles se démontrent à partir de l'inégalité de dispersion

$$\|v_{\mathbb{R}^d}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C|t|^{-d/2}\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad (0.9)$$

qui se déduit facilement dans le cas euclidien de la forme explicite (0.7) de v ; on utilise ensuite la conservation de l'énergie, le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et l'argument TT^* .

Historique Les estimations de dispersion et de Strichartz sont aujourd'hui bien comprises sur l'espace euclidien ainsi que sur les variétés sans bord suffisamment régulières. Dans le cadre euclidien, elles découlent des représentations explicites du flot linéaire, tandis que sur une variété sans bord la vitesse finie de propagation permet de se ramener localement à des opérateurs à coefficients variables. Pour des métriques de régularité $C^{1,1}$, des estimations optimales ont notamment été obtenues par H. Smith [58], tandis qu'en dessous de ce seuil de régularité une perte de dérivée est inévitable (voir D. Tataru [64]).

En présence d'un bord, la situation est beaucoup moins satisfaisante. Pour les équations des ondes sur un domaine général et pour l'équation de Schrödinger sur des domaines extérieurs, les propriétés dispersives des solutions restent encore imparfaitement comprises. Dans le cas de Schrödinger sur un domaine borné, on ne disposait pas, avant les travaux présentés ici, d'estimations de Strichartz suffisamment fortes pour les principales applications non linéaires.

Des résultats optimaux sont connus dans certaines géométries particulières, notamment pour les variétés à bord strictement concave grâce à la paramétrice de Melrose et Taylor au voisinage des rayons tangents. En revanche, dès que cette hypothèse est abandonnée, la présence de rayons multi-réfléchis, de rayons glissants et des caustiques qu'ils engendrent constitue aujourd'hui encore le principal obstacle à l'obtention d'estimations dispersives optimales.

Résultats marquants

Depuis plusieurs années, j'ai entamé un programme à long terme d'étude systématique des propriétés dispersives de l'équation des ondes sur des domaines à bord. La suite de ce rapport présente les principaux résultats obtenus dans ce programme de recherche, en insistant plus particulièrement sur les travaux réalisés depuis 2023, même si plusieurs d'entre eux trouvent leur origine dans des travaux commencés plusieurs années auparavant.

1 Ondes et Schrödinger à l'extérieur d'un obstacle convexe (une boule, un cylindre, plusieurs boules, un obstacle convexe générique, etc)

On considère d'abord la situation d'un domaine à bord strictement concave (qui semble, de prime abord, plus simple car sans rayons multi-réfléchis, donc sans singularités géométriques dans le front d'onde). Dans ce cas, un rayon touche le bord au plus une fois, ce qui indique que la solution d'un problème au bord serait une superposition d'une onde rentrante et d'une onde sortante, couplées par la condition au bord. Les seules difficultés potentielles proviennent alors des rayons qui frôlent le bord sans être déviés, appelés rayons diffractifs.

En effet, la difficulté principale à l'extérieur d'un convexe strict est liée au comportement de l'onde diffractée, près du bord de l'obstacle. Dès les travaux fondateurs de Keller [34] sur la théorie géométrique de la diffraction, on sait que le comportement des rayons rasants est gouverné par des rayons rampants se propageant le long du bord. Cette description a ensuite été justifiée rigoureusement par les travaux de Ludwig, Hargé-Lebeau [26], puis par la construction de la paramétrice microlocale de Melrose et Taylor près des rayons diffractifs [48], [49], [50],[67]. Cette paramétrice constitue aujourd'hui un outil fondamental de l'analyse des phénomènes de diffraction près des rayons diffractifs et intervient dans la plupart des travaux ultérieurs sur les problèmes à bord.

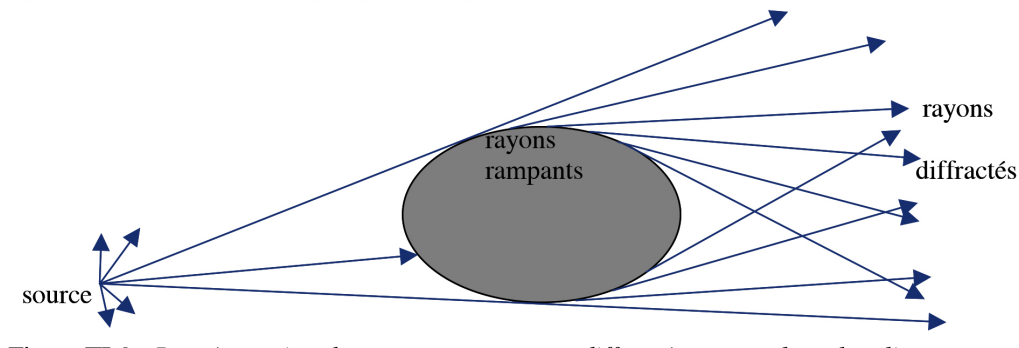


Fig. : Représentation des rayons rampants et diffractés par un obstacle "lisse".

Source : P. Vaudon, "Introduction à la théorie géométrique de la diffraction"

En particulier, Hart Smith et Christopher Sogge ([61], see also [60]) ont utilisé cette paramétrice pour déduire des inégalités de Strichartz optimales (sauf pour les "endpoints", i.e. exposants de Strichartz limite) pour l'équation des ondes (0.1) à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe de $\mathbb{R}^d$ (et aussi pour démontrer les estimations de projecteurs spectraux). Dans [OI2] j'ai démontré des estimations de Strichartz optimales pour le flot classique de Schrödinger avec condition de Dirichlet (pour lequel un problème supplémentaire était représenté par la vitesse dite *infinie* de propagation du flot).

Alors que les estimations de Strichartz, les estimations sur les projecteurs spectraux et d'autres résultats dispersifs étaient désormais bien compris, la validité des estimations de dispersion demeurait entièrement ouverte, même dans le cas le plus simple de l'extérieur d'une boule (au moins depuis les travaux de Smith et Sogge [61]). À la différence d'un obstacle non captant quelconque, dont certaines portions concaves peuvent agir comme des miroirs et refocaliser les paquets d'ondes, un obstacle strictement convexe ne possède pas de tels mécanismes de concentration. Il était naturel de conjecturer que les estimations dispersives y restent identiques

au cas euclidien.

Dans [OI15] nous répondons à cette question dans le cas modèle de l'extérieur de la boule :

Dispersive estimates for the wave and the Schrödinger equations outside strictly convex obstacles
and counterexamples

à paraître (2026) [OI15]

Nous considérons les équations des ondes et de Schrödinger dans le cas de l'extérieur de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, pour lequel les calculs peuvent être menés explicitement et permettent de mieux comprendre le comportement de l'onde près de l'horizon apparent et

- si $d = 3$, nous montrons que, pour chacune des deux équations, le flot linéaire vérifie les estimations de dispersion comme dans $\mathbb{R}^3$;
- si la dimension est plus grande $d \geq 4$, nous montrons, en construisant des contre-exemples explicites, que des pertes dans la dispersion apparaissent à l'extérieur d'une boule de $\mathbb{R}^d$ et cette perte apparaît au point de Poisson-Arago.

La différence entre ces deux situations provient du comportement de l'onde diffractée au voisinage du point de Poisson-Arago, dont la contribution devient dominante à partir de la dimension quatre.

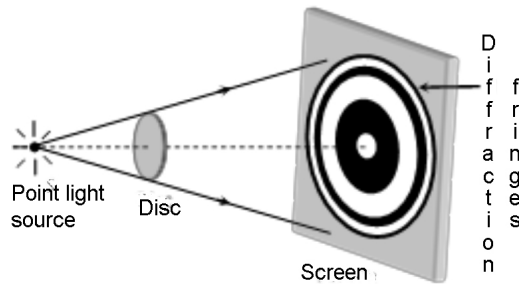
Théorème 1. ([OI15]) Soit $B_3(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et soit $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus B_3(0, 1)$. On note Δ l'opérateur Laplace dans Ω_3 avec condition de Dirichlet au bord. Alors

1. les estimations de dispersion pour le propagateur des ondes dans Ω_3 sont vérifiées :

$$\|\chi(hD_t)e^{\pm it\sqrt{-\Delta}}\|_{L^1(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)} \leq Ch^{-3} \min\{1, \frac{h}{|t|}\}.$$

2. les estimations de dispersion pour le flot de Schrödinger dans Ω_3 sont vérifiées comme dans $\mathbb{R}^3$.

Ce résultat montre que, malgré la présence du bord et des phénomènes de diffraction, les solutions des équations des ondes et de Schrödinger à l'extérieur d'une boule de $\mathbb{R}^3$ vérifient exactement les mêmes estimations dispersives que dans l'espace euclidien. Autrement dit, la diffraction engendrée par l'obstacle ne ralentit pas la décroissance des solutions et n'entraîne aucune perte dans la dispersion. Ce résultat fournit ainsi une réponse positive à une question restée ouverte depuis les travaux de Smith et Sogge [61] et montre que, dans ce modèle, les phénomènes de diffraction sont suffisamment faibles pour préserver le comportement dispersif optimal.



Une question naturelle est alors de comprendre pourquoi cette propriété est spécifique à la dimension trois ou si elle reste valable en dimension supérieure. D'un point de vue géométrique, une perte de dispersion ne peut apparaître qu'en présence d'un phénomène de concentration des rayons. Le seul candidat naturel est le point de

Poisson-Arago, connu depuis le XIXe siècle en optique : lorsqu'une onde éclaire un obstacle sphérique, les ondes diffractées interfèrent constructivement au centre de la zone d'ombre, produisant la célèbre tâche lumineuse observée expérimentalement. Si une perte de dispersion devait apparaître, il est donc naturel de la rechercher au voisinage de cette région de concentration.

Théorème 2. ([OI15]) Soit $B_d(0, 1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 4$. Soit $\Omega_d = \mathbb{R}^d \setminus B_d(0, 1)$, Δ l'opérateur de Laplace dans Ω_d avec condition de Dirichlet au bord et soient $Q_{\pm}(r)$ deux points de Ω_d situés à distance r du centre O de la boule $B_d(0, 1)$, symétriques par rapport à O . Soit $h \in (0, 1)$ suffisamment petit et $\chi \in C_0^\infty$ à support dans un petit voisinage de 1. Alors il existe γ proche de $\frac{1}{2}$ tel que, pour $r = \gamma h^{-1/3}$, on ait

- (le propagateur des ondes) pour $t = 2(\arcsin \frac{1}{r} + \sqrt{r^2 - 1}) \sim h^{-1/3}$

$$\left| (\chi(hD_t)e^{it\sqrt{-\Delta}}(\delta_{Q_+(\gamma h^{-1/3})})) \right| (Q_-(\gamma h^{-1/3})) \sim h^{-d} \left(\frac{h}{t} \right)^{\frac{d-1}{2}} h^{-\frac{d-3}{3}},$$

- (le propagateur de Schrödinger classique) pour $t \simeq h^{1/3}$

$$\left| (\chi(hD_t)e^{it\Delta}(\delta_{Q_+(\gamma h^{-1/6})})) \right| (Q_-(\gamma h^{-1/6})) \sim h^{-1-\frac{d}{6}-\frac{d-3}{6}}.$$

Pour $d \geq 4$, ces estimations contredisent les estimations du cas plat $\mathbb{R}^d$ (avec perte en rouge).

Le théorème montre que la dimension trois constitue un cas exceptionnel : à partir de la dimension quatre, le phénomène de diffraction au voisinage du point de Poisson-Arago devient suffisamment fort pour dégrader les estimations dispersives. Nous construisons des contre-exemples explicites montrant que les estimations dispersives euclidiennes ne peuvent plus être vraies à l'extérieur d'une boule. Ces contre-exemples sont obtenus en choisissant une donnée initiale très localisée et en analysant précisément l'évolution des ondes à haute fréquence.

Le résultat met en évidence que la perte de dispersion apparaît précisément au voisinage du point de Poisson-Arago, c'est-à-dire dans la région où les ondes diffractées issues de différents points du bord interfèrent constructivement. La concentration de l'énergie en ce point est suffisamment importante pour ralentir la décroissance des solutions et provoquer une perte par rapport aux estimations euclidiennes. Le théorème identifie ainsi le mécanisme géométrique à l'origine de ces pertes dans ce modèle.

Ce résultat fournit également le premier exemple d'un domaine dans lequel les estimations de Strichartz restent valables avec les mêmes exposants que dans l'espace euclidien, alors que les estimations de dispersion échouent. Ce résultat montre que, contrairement à ce qui pouvait être suggéré par les exemples connus jusqu'à là, les estimations de Strichartz et les estimations de dispersion ne sont pas équivalentes en présence d'un bord et que la validité des premières n'implique pas celle des secondes.

Extérieur d'un cylindre dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 5$ Si le cas de la boule unité 3D était déjà mentionné dans [OI9], dans [OI15] nous considérons également le cas des obstacles cylindriques dans $\mathbb{R}^d$ en dimension $d \geq 5$ de la forme $B_{d_1}(0, 1) \times \mathbb{R}^{d_2}$ où $d_{1,2}$ sont tels que $d_1 + d_2 = d$ et $d_1 \geq 3$, $d_2 \geq 0$. Ici $B_{d_1}(0, 1)$ est la boule unité centrée en $0 \in \mathbb{R}^{d_1}$. On définit $\Omega_{d_1, d_2} := (\mathbb{R}^d \setminus B_{d_1}(0, 1)) \times \mathbb{R}^{d_2}$, dont le bord est donné par $\mathbb{S}^{d_1-1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Théorème 3. ([OI15]) Soient $d \geq 5$, $d_{1,2} \in \mathbb{N}$ avec $d = d_1 + d_2$. Soit $\Delta_{\Omega_{d_1, d_2}}$ l'opérateur de Laplace dans Ω_{d_1, d_2} avec condition de Dirichlet au bord. Soient $Q_{\pm}(s) \in \Omega_{d_1, d_2} \cap \mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}^{d_2}$ deux points Ω_{d_1, d_2} , symétriques par rapport au centre de la boule $B_{d_1}(0, 1) \times \{0_{\mathbb{R}^{d_2}}\}$, à distance $s > 1$ de $\{0\} \in \mathbb{R}^d$. Soit $\psi \in C_0^\infty((\frac{1}{2}, 2))$ une fonction régulière à support compact égale à 1 près de 1, $0 \leq \chi \leq 1$.

Pour l'opérateur des ondes, il existe $0 < h_0 < 1$ tel que pour tout $0 < h \leq h_0$ et pour $s \sim h^{-1/3}$ on ait $t \sim 2(\sqrt{s^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{s}) \sim 2h^{-1/3}$

$$\left| \chi(hD_t) e^{it\sqrt{-\Delta_{\Omega_{d_1, d_2}}}} (\delta_{Q_+(s)}) \right| (Q_-(s)) \sim h^{-d} \left(\frac{h}{t} \right)^{\frac{d-1}{2}} h^{-\frac{d_1-3}{3}}.$$

Pour l'opérateur de Schrödinger, soit $0 < h \leq h_0^2$, $s \sim h^{-1/6}$, $t \sim h^{1/3}$. Alors on a

$$\left| \chi(hD_t) e^{it\Delta_{\Omega_{d_1, d_2}}} (\delta_{Q_+(s)}) \right| (Q_-(s)) \sim h^{-\frac{d}{6} - \frac{d_1-3}{6}}, \quad h^{-\frac{d}{6}} \sim t^{-\frac{d}{2}}.$$

Pour $d_1 \geq 4$, ces estimations contredisent les estimations de dispersion usuelles (0.5).

Ce résultat étend de manière substantielle [OI9], qui n'esquissait que le cas de l'extérieur d'une boule. Nous généralisons ici les contre-exemples à une large famille d'obstacles cylindriques de la forme $B^{d_1}(0, 1) \times \mathbf{R}^{d_2}$, et montrons ainsi que les pertes de dispersion ne sont pas propres à la géométrie sphérique mais relèvent d'un mécanisme géométrique beaucoup plus général.

Plus précisément, nous construisons explicitement des données initiales concentrées en un point source situé à une distance de l'ordre de $h^{-1/3}$ du cylindre et montrons qu'il existe des points d'observation, situés dans la région symétrique par rapport à la section sphérique du cylindre, pour lesquels les solutions présentent une perte de dispersion de l'ordre de $h^{-(d_1-3)/3}$ par rapport au cas euclidien. Nous montrons en outre que toute la gamme des pertes comprises entre l'absence de perte et cette perte maximale peut être obtenue en faisant varier convenablement le point d'observation.

Ce résultat met en évidence que l'origine des pertes de dispersion est essentiellement liée à la géométrie de la section convexe de l'obstacle et non à la dimension totale de l'espace. Il constitue ainsi un premier pas vers une caractérisation géométrique des obstacles convexes pour lesquels les estimations dispersives restent valables comme dans l'espace libre ou, au contraire, présentent des pertes.

Enfin, cette étude met en lumière la grande sensibilité du phénomène de Poisson-Arago à la géométrie du bord. Alors que, pour une section parfaitement circulaire, les ondes diffractées se concentrent en un point unique, une perturbation même très régulière de cette géométrie modifie profondément la structure des interférences et transforme ce point de concentration en une caustique plus complexe. Cette observation montre que la nature des pertes de dispersion est intimement liée à la géométrie fine des ensembles de focalisation.

1.1 Ondes à l'extérieur d'un cylindre dans $\mathbb{R}^3$

Le cylindre constitue un premier modèle de domaine dont le bord n'est plus strictement convexe, puisqu'il possède des directions de courbure nulle. Il représente ainsi une étape intermédiaire naturelle vers l'étude de domaines à géométrie plus générale.

Dans un travail récent [OI16] réalisé avec mon ancien post-doctorant Felice Iandoli, nous avons obtenu des estimations dispersives optimales pour l'équation des ondes à l'extérieur d'un cylindre dans $\mathbb{R}^3$. Cette géométrie présente un comportement sensiblement différent de celui d'un obstacle strictement convexe. En particulier, les phénomènes de focalisation responsables des pertes de dispersion à l'extérieur d'une sphère sont nettement moins prononcés dans le cas du cylindre, où la concentration de l'énergie au voisinage des points de Poisson est moins marquée.

[Dispersive estimates for the wave equation outside a cylinder](#)

avec Felice Iandoli, Journal Functional Analysis (2024) [OI16]

La principale difficulté apparaît lorsque les points source et d'observation sont tous deux très proches du bord, tout en pouvant être très éloignés l'un de l'autre le long de l'axe du cylindre. Dans cette configuration,

les outils microlocaux habituellement utilisés pour décrire la propagation des ondes ne sont plus directement applicables. Nous exploitons alors la symétrie cylindrique du problème pour écrire une représentation exacte de la solution à l'aide des fonctions spéciales de Bessel et de Hankel. Cette représentation décrit avec précision les ondes qui restent confinées au voisinage du bord ainsi que celles qui se propagent essentiellement parallèlement à l'axe du cylindre, et conduit aux estimations dispersives optimales dans ces deux régimes.

Cette représentation explicite ne suffit toutefois pas à traiter l'ensemble des configurations géométriques. En particulier, elle ne décrit pas correctement les rayons glissants, qui frôlent le bord sans s'en éloigner immédiatement. Pour ces trajectoires, nous développons une analyse complémentaire, fondée sur une paramétrice construite à l'aide d'intégrales oscillantes, dans l'esprit de nos travaux sur les obstacles strictement convexes [OI15]. La différence essentielle est que les phénomènes de diffraction sont ici nettement plus faibles, ce qui permet finalement d'obtenir les estimations dispersives optimales pour l'ensemble des régimes de propagation.

1.2 Extérieur de plusieurs obstacles convexes dans $\mathbb{R}^d$

Les travaux de David Lafontaine [36, 37, 38] portent sur les estimations de Strichartz pour les équations des ondes et de Schrödinger à l'extérieur de plusieurs obstacles strictement convexes. Contrairement au cas d'un unique obstacle convexe, qui constitue le modèle de géométrie non captante, la présence de plusieurs obstacles fait apparaître des trajectoires captées sur lesquelles l'énergie peut rester piégée pendant des temps très longs. Cette géométrie induit une perte logarithmique dans les estimations d'effet régularisant et rend l'obtention des estimations de Strichartz particulièrement délicate.

Dans des travaux antérieurs, Burq, Guillarmou et Hassell [4] avaient montré que, malgré ce phénomène de capture, les estimations de Strichartz restent valables sur certaines variétés sans bord présentant un captage hyperbolique. Leur preuve repose sur une combinaison subtile entre les estimations d'effet régularisant loin de l'ensemble capté et la construction d'une paramétrice valable pendant des temps logarithmiques au voisinage de celui-ci. L'un des principaux apports de David Lafontaine a consisté à adapter cette stratégie au cas très délicat des domaines à bord. En s'appuyant sur la paramétrice construite par Ikawa pour l'équation des ondes à l'extérieur de plusieurs obstacles convexes, il a montré que cette représentation permettait d'obtenir les estimations de Strichartz sur les échelles de temps logarithmiques nécessaires à l'argument, complétant ainsi le programme initié par Smith et Sogge pour les ondes et par mes travaux de thèse pour Schrödinger.

Dispersive estimates for the wave equation outside two balls in $\mathbb{R}^3$

avec David Lafontaine, travail en cours

Ce travail soulève naturellement une nouvelle question : les estimations de dispersion elles-mêmes restent-elles valables en présence de plusieurs obstacles ? Nous avons commencé à étudier cette question dans le cas modèle de deux boules de rayons différents dans $\mathbb{R}^3$. La difficulté est ici d'une nature entièrement différente. La paramétrice d'Ikawa décrit la solution comme une somme d'intégrales oscillantes correspondant aux réflexions successives entre les deux obstacles. Elle est parfaitement adaptée à l'obtention des estimations de Strichartz, mais ne fournit pas un contrôle suffisamment précis des fonctions de phase pour établir des estimations dispersives optimales lorsque le nombre de réflexions devient très grand. En pratique, cette limitation contraint l'analyse à des temps logarithmiques relativement courts, alors que certains rayons issus du voisinage de la trajectoire captée ne quittent la région des obstacles qu'à des temps logarithmiques beaucoup plus longs.

Notre approche consiste à reconstruire complètement cette paramétrice dans le cas modèle des deux boules, en exploitant la géométrie très particulière des réflexions. Cette description permet d'explicitier les fonctions de phase et, surtout, de contrôler uniformément toutes leurs dérivées jusqu'au temps de sortie des rayons. Nous obtenons ainsi des estimations dispersives sur l'ensemble de l'intervalle de temps pertinent, ouvrant la voie à une compréhension beaucoup plus fine de la propagation dans les géométries captantes et à une généralisation future au cas de plusieurs obstacles strictement convexes. Au-delà du cas modèle de deux obstacles, ce travail constitue une première étape vers une théorie dispersive des géométries captantes, aujourd'hui encore largement ouverte.

2 Les ondes dans un domaine convexe - estimées de dispersion et des projecteurs spectraux

Plusieurs travaux récents ou en cours s'appuient sur le résultat [OI13], que je rappelle brièvement.

2.1 Ondes dans un domaine convexe avec condition de Dirichlet - estimées de dispersion

Nos premiers travaux sur les domaines strictement convexes, réalisés avec Fabrice Planchon et Gilles Lebeau [OI7], ont constitué le point de départ d'une nouvelle approche de la propagation des ondes au voisinage d'un bord réfléchissant. Nous y montrons que la perte de dispersion observée par rapport à l'espace libre est un phénomène géométrique inévitable, provoqué par la formation de caustiques (zones de focalisation des rayons géométriques) après les réflexions sur le bord.

Dans un travail ultérieur [OI13], nous avons étendu cette analyse au cas d'un domaine strictement convexe quelconque. Nous obtenons une description microlocale précise de la propagation des singularités et construisons la première paramétrice permettant de suivre l'onde malgré un nombre arbitrairement grand de réflexions. Cette construction conduit à des estimations dispersives optimales de la fonction de Green et constitue une étape importante vers la compréhension des équations des ondes dans les domaines à bord. Ce travail est la base d'un effort à plus long terme pour parvenir à une compréhension complète des estimations dispersives dans les domaines à bord quelconques (avec l'objectif, qui reste à atteindre, d'utiliser cette connaissance pour diverses applications importantes, notamment en contrôle).

Dispersive estimates for the wave equation inside strictly convex domains II

avec Richard Lascar, Gilles Lebeau et Fabrice Planchon, Annals of PDE (2023) [OI13]

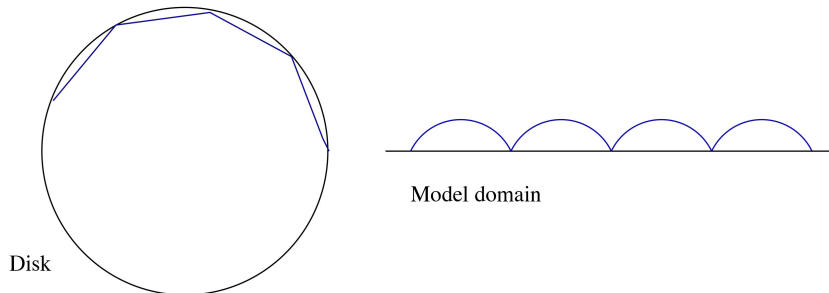
Nous commençons par étudier le modèle de Friedlander, qui constitue un modèle local canonique d'un bord strictement convexe, défini par le demi-espace

$$\Omega_d = \{(x, y) | x > 0, y \in \mathbb{R}^{d-1}\}$$

et muni de la métrique g_F héritée de l'opérateur de Laplace suivant:

$$\Delta_F = \partial_x^2 + (1+x)\Delta_{\mathbb{R}_y^{d-1}}.$$

Le couple (Ω_d, g_F) constitue un modèle local canonique d'un domaine strictement convexe: en effet, (Ω_d, g_F) peut être regardé comme un modèle simplifié du disque unité $D(0, 1)$ après le passage en coordonnées polaires (r, θ) , avec $r = 1 - x/2$, $\theta = y$.



Nous avons d'abord montré que, dans le domaine de Friedlander, une perte par rapport à l'estimation de dispersion libre (0.5) est inévitable, et cela apparaît en raison de la présence de caustiques de type queue d'aronde dans le support singulier de la solution du problème linéaire.

Théorème 4. ([OI7]) Il existe une constante $C(d) > 0$ tels que pour tous $a \in (0, 1]$, $h \in (0, 1)$ et $t \in (0, 1]$ la solution $u_a(t, x, y) = \cos(t\sqrt{|\Delta_F|})(\delta_{x=a, y=0})$ de (0.1) (avec Δ remplacé par Δ_F) vérifie

$$|\psi(hD_t)u_a(t, x, y)| \leq C(d)h^{-d} \min\{1, (h/t)^{\frac{d-2}{2}} \gamma(t, h, a)\}, \quad (2.1)$$

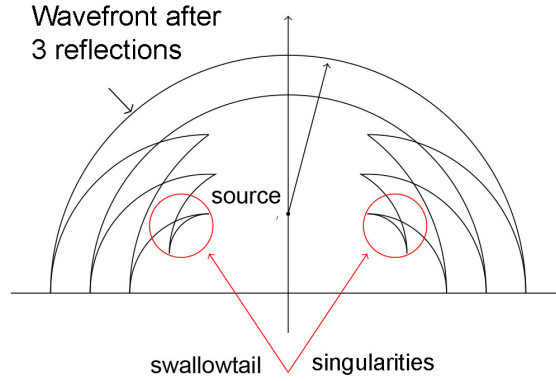
où

$$\gamma(t, h, a) = \begin{cases} (\frac{h}{t})^{1/2} + h^{1/3} + a^{1/4}(\frac{h}{t})^{1/4}, & \text{si } a \geq h^{4/7-\epsilon} \\ (\frac{h}{t})^{1/3} + h^{1/4}, & \text{si } a \leq h^{1/2}. \end{cases}$$

De plus, il existe une suite de temps $t_n = 4n\sqrt{a}\sqrt{1+a}$ pour lesquels on a égalité dans (2.1).

Le théorème montre que les estimations de dispersion (2.1) subissent une perte de $1/4$ de dérivée par rapport à l'espace libre. Cette perte est optimale et est directement causée par la formation de caustiques de type queue d'aronde. Ces singularités apparaissent lorsque plusieurs rayons issus d'une même source se recombinent après réflexion sur le bord, créant localement une concentration importante de l'énergie.

Un aspect essentiel de la preuve est la description précise des ondes "sphériques" engendrées par une source ponctuelle. Contrairement au cas de l'espace libre, ces fronts d'onde acquièrent une géométrie très complexe après les réflexions successives sur le bord, avec apparition de caustiques et d'auto-intersections, comme l'illustre la figure ci-dessus, correspondant à seulement trois réflexions successives.



La preuve combine deux mécanismes complémentaires. Dans le régime où la paramétrice microlocale est valide, les estimations proviennent d'une analyse par phase stationnaire dégénérée d'intégrales oscillantes de type Airy, puis Pearcey au voisinage des queues d'aronde. Dans un régime intermédiaire, où cette construction devient instable, les estimations sont obtenues par un argument de type Sobolev exploitant la préservation du microsupport par le flot.

Dans le modèle de Friedlander, la décomposition de l'onde sur les modes de galerie permet d'obtenir une représentation explicite de la fonction de Green. L'analyse asymptotique des intégrales oscillantes qui en résultent, faisant intervenir des fonctions spéciales de type Airy puis Pearcey au voisinage des queues d'aronde, constitue le coeur de la preuve des estimations dispersives optimales. Précisément, pour $a > 0$, si $\delta_{x=a}$ désigne la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}_+$, elle s'écrit comme une somme de modes de galerie e_k de la façon suivante

$$\delta_{x=a} = \sum_{k \geq 1} e_k(x, \theta) e_k(a, \theta), \quad (2.2)$$

où e_k désignent les fonctions propres $Ai(|\theta|^{2/3}x - \omega_k)$ (avec un facteur de normalisation dans L^2) du Laplacien de Friedlander Δ_F (qui, après transformation de Fourier en y , est donné par $-\partial_x^2 + (1+x)\theta^2$), associées aux valeurs propres $\lambda_k(\theta) = |\theta|^2 + \omega_k|\theta|^{4/3}$ (et où $(-\omega_k)$ sont les zéros de la fonction d'Airy en ordre décroissant). La formule de la fonction de Green s'écrit alors :

$$G_{W,h,a}(t, x, y) = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}} e^{it\sqrt{\lambda_k(\theta)}} e^{iy\theta} \psi(h|\theta|) e_k(x, \theta) e_k(a, \theta) d\theta. \quad (2.3)$$

La fonction $G_{W,h,a}$ est une paramétrice pour l'équation des ondes (0.1) avec donnée au temps $t = 0$ égale à $\psi(hD_y)\delta_{x=a,y=0}$. Elle est valable pour toute distance initiale $a > 0$ au bord.

Dans le travail [OI13] nous avons généralisé notre résultat précédent au cas d'un domaine strictement convexe quelconque (Ω_d, Δ) (le résultat ci-dessous redonne, dans le cas du modèle, le même résultat que précédemment : seule la forme de l'énoncé est un peu différente dans l'expression de la majoration.)

Théorème 5. ([OI13]) *Soit $d \geq 2$ et soit Ω une variété compacte dont le bord est strictement convexe. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Il existe $C > 0$, $T_0 > 0$ et $a_0 > 0$ tels que pour tout $a \in]0, a_0]$, $h \in (0, 1)$ et $t \in [-T_0, T_0]$, la solution u_a de (0.1) avec donnée $(u_0, u_1) = (\delta_a, 0)$, où δ_a désigne la distribution de Dirac à distance a de $\partial\Omega$, vérifie*

$$|\psi(-h^2\Delta)u_a(t, x)| \leq \frac{C}{h^d} \min \left\{ 1, a^{1/4} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}} + \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{3}} \right\}. \quad (2.4)$$

La généralisation du modèle de Friedlander à un domaine strictement convexe quelconque soulève plusieurs difficultés nouvelles. Les outils explicites disponibles dans le modèle (en particulier les modes de galerie) disparaissent complètement et il n'est plus possible de construire directement une paramétrice par les méthodes utilisées précédemment. Nous avons donc développé une nouvelle construction microlocale perturbative adaptée à un opérateur de Laplace général.

L'étape essentielle consiste à construire une famille de quasimodes adaptés à la géométrie locale du bord, qui remplacent les modes de galerie e_k du modèle. Contrairement à ces derniers, ces quasimodes dépendent de l'ensemble des variables et non plus seulement de la variable normale au bord, ce qui rend leur analyse beaucoup plus délicate. Leur construction n'est possible que dans un régime où l'on contrôle uniformément l'écart entre leurs phases et celles du modèle de Friedlander, condition indispensable pour conserver une approximation microlocale précise.

Cette construction des quasimodes, accompagnée d'estimations uniformes dans tous les paramètres, constitue, à notre connaissance, un résultat entièrement nouveau qui présente un intérêt propre. Au-delà de son rôle dans la preuve des estimations dispersives, cette construction fournit un nouvel outil microlocal susceptible d'être utilisé dans d'autres problèmes de propagation au voisinage d'un bord strictement convexe.

2.2 Estimations dispersives en temps long pour les ondes et Klein-Gordon

Dans les travaux précédents sur les domaines strictement convexes, les estimations dispersives étaient obtenues uniquement sur des intervalles de temps bornés. Cette restriction est naturelle sur un domaine compact : après un temps suffisamment long, une onde ne peut plus continuer à se disperser puisqu'elle reste confinée dans le domaine. Le modèle de Friedlander, qui est localement un modèle de la boule mais reste non compact, offre en revanche un cadre naturel pour étudier les phénomènes de dispersion en temps long. On peut l'interpréter comme un modèle simplifié de guide d'ondes.

Long time dispersive estimates for the wave and the Klein-Gordon equations inside strictly convex domains
Discrete Continuous Systems (2021) [OI14]

Dans [OI14], j'ai étudié cette question dans le cadre plus général de l'équation de Klein-Gordon. J'y établis des estimations dispersives globales en temps, optimales aux grandes fréquences, qui prolongent les résultats obtenus auparavant pour l'équation des ondes sur des temps bornés. L'équation de Klein-Gordon est

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + m^2)u^{(m)}(t, x) = 0, & x \in \Omega \\ u^{(m)}|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u^{(m)}|_{t=0} = u_1, \\ u^{(m)} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ici $m \in \{0, 1\}$: lorsqu'on parle de l'équation des ondes on écrit $u^{(m=0)}$ et lorsqu'on considère l'équation de Klein Gordon on écrit $u^{(m=1)}$. Pour $\Omega = \mathbb{R}^d$ avec métrique plate, la solution $u_{\mathbb{R}^d}^{(m)}(t, x)$ to (2.5) avec donnée

$u_0 = \delta_{x_0}, u_1 = 0, x_0 \in \mathbb{R}^d$ a une formule explicite

$$u_{\mathbb{R}^d}^{(m=1)}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i(x-x_0)\xi + it\sqrt{|\xi|^2 + m^2}} d\xi$$

et, en utilisant des arguments standard de phase stationnaire on obtient l'estimation de dispersion libre pour tout temps $t > 0$, où l'on remarque l'influence de la masse pour $t > 1/h$, où la dispersion devient meilleure (même décroissance que pour Schrödinger) :

$$\|\psi(hD_t)u_{\mathbb{R}^d}^{(m)}(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C(d)h^{-d} \min \left\{ 1, (h/t)^{\frac{d-1}{2}}, (h/t)^{\frac{d-1}{2}} \frac{1}{m\sqrt{th}} \right\}. \quad (2.6)$$

Lorsque $\Omega = \Omega_d$ avec métrique g_F héritée de Δ_F et $(u_0, u_1) = (\psi(hD_y)\delta_{x=a, y=0}, 0)$, la fonction de Green pour (2.5) est obtenue (au moins formellement) de la même manière que (2.3),

$$G_h^m(t, x, y) = \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{\pm i(t-t_0)\sqrt{m^2 + \lambda_k(\theta)}} \psi(h|\theta|) e^{i\langle (y-y_0), \theta \rangle} e_k(x, \theta) e_k(x_0, \theta) d\theta. \quad (2.7)$$

Dans [OI14], nous avons obtenu le résultat suivant pour G_h^m dans $(0, \infty) \times \Omega_d$:

Théorème 6. ([OI14]) Soit $m \in \{0, 1\}$, $d \geq 2$ et $\psi \in C_0^\infty([1, 2])$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $a > 0$, $h \in (0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, la solution $u^{(m)}$ de (2.5) avec Δ remplacé par Δ_F , Ω par Ω_d et avec donnée $(u_0, u_1) = (\delta_{a,0}, 0)$, où $\delta_{a,0}$ désigne la distribution de Dirac en un point $(a, 0) \in \Omega_d$, vérifie

$$|G_h^m(t, x, y)| \leq \frac{C}{h^d} \min \left\{ 1, \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{4}} \right\}.$$

Soit $\phi \in C_0^\infty((-2, 2))$ égale à 1 sur $[0, \frac{3}{2}]$. Il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $a > 0$, $t \in \mathbb{R}^*$

$$|\phi(\sqrt{-\Delta_F})u^{(m=0)}(t, x, a, y)| \leq C_0 \min \left\{ 1, \frac{1}{|t|^{\frac{d-1}{2}}} \right\}. \quad (2.8)$$

Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $a > 0$, $|t| > 1$

$$|(\phi(\sqrt{-\Delta_F})u^{(m=1)}(t, x, a, y))| \leq C_1 \min \left\{ 1, \frac{1}{|t|^{\frac{d-2}{2} + \frac{1}{3}}} \right\}. \quad (2.9)$$

La principale difficulté provient du fait qu'en temps long un nombre très important de réflexions successives intervient près du bord. Les outils développés pour les temps bornés deviennent alors insuffisants et il est nécessaire de changer complètement de stratégie selon le régime temporel considéré. Aux temps intermédiaires, il faut contrôler simultanément les contributions d'un grand nombre d'ondes réfléchies ; aux temps très grands, cette description cesse d'être efficace et l'analyse doit revenir à une représentation en modes de galerie, combinée à des méthodes d'intégrales oscillantes adaptées au régime asymptotique.

L'un des aspects les plus nouveaux de ce travail concerne les *petites fréquences* (2.8), (2.9), qui n'avaient pratiquement jamais été étudiées auparavant dans ce contexte. Contrairement aux grandes fréquences, où les pertes de dispersion sont essentiellement dictées par la géométrie des rayons et la formation de caustiques, les petites fréquences révèlent un phénomène entièrement nouveau. Nous montrons que l'équation des ondes conserve un comportement dispersif optimal, tandis que l'équation de Klein-Gordon présente une perte de décroissance, optimale, lorsque la fréquence est du même ordre que la masse. Cette différence provient de l'apparition de points critiques dégénérés dans les phases oscillantes, créés par le terme de masse et absents dans le cas des ondes. Ce résultat met ainsi en évidence un nouveau mécanisme de dispersion en temps long, spécifique à la propagation près du bord, qui pourrait subsister bien au-delà du modèle de Friedlander et apparaître dans des modèles plus réalistes de guides d'ondes.

Ce résultat met ainsi en évidence un nouvel effet dispersif en temps long, directement lié à la propagation au voisinage du bord. Rien n'indique qu'il soit spécifique au modèle de Friedlander ; au contraire, il suggère que des phénomènes analogues devraient apparaître dans des modèles plus réalistes de guides d'ondes ou de propagation confinée.

2.3 Estimations de Strichartz pour les ondes dans des domaines strictement convexes

Les estimations de Strichartz jouent un rôle fondamental dans l'étude des équations dispersives non linéaires. Elles mesurent la dispersion non plus à un instant fixé, mais en moyenne sur le temps. Une question fondamentale est de savoir si les pertes observées dans les estimations de dispersion restent également optimales lorsque l'on moyenne les solutions en temps, comme c'est le cas dans les estimations de Strichartz.

Pendant plusieurs années, les contre-exemples que j'avais construits dans mes travaux [OI4, OI6] semblaient montrer que les pertes obtenues étaient optimales et qu'elles reflétaient fidèlement les limitations imposées par la géométrie du bord. En particulier, on s'attendait à ce que la perte optimale pour les estimations de Strichartz soit directement gouvernée par la perte d'un quart apparaissant dans les estimations dispersives.

Nos travaux [OI10] et [OI11] montrent que cette intuition était en réalité fautive. Les singularités de type queue d'aronde sont bien responsables de la perte optimale dans les estimations de dispersion à temps fixé, mais elles sont trop rares pour gouverner les estimations de Strichartz. Comme elles n'apparaissent qu'à des instants exceptionnels, leur contribution est fortement atténuée par la moyenne temporelle. Les estimations de Strichartz sont donc régies par des phénomènes différents de ceux qui déterminent la dispersion ponctuelle.

Strichartz estimates for the wave equation in strictly convex domains in $2D$

avec Gilles Lebeau et Fabrice Planchon, J. Diff. Eq. (2021) [OI11]

Un des résultats principaux de [OI11] est le suivant (en dimension $d = 2$)

Théorème 7. [[OI11]] *Les estimations de Strichartz pour (0.1) sont vérifiées dans (Ω_2, g_F) pour des paires (q, r) telles que*

$$\frac{1}{q} \leq \left(\frac{1}{2} - \delta(2)\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right), \quad q > 2, \quad \delta(2) = \frac{1}{9}. \quad (2.10)$$

Pour $d = 2$, [9] obtient $\delta(2) = \frac{1}{6}$ (mais pour tout bord régulier), alors que notre résultat [OI7] sur la dispersion implique seulement $\delta(2) = \frac{1}{4}$, en utilisant la méthode TT^* habituelle. Pour $d \geq 3$, la perte (optimale) de $1/4$ dans nos estimations de dispersion du Théorème 4 donne, uniformément par rapport à la dimension, $\delta(d) = \frac{1}{4}$, ce qui améliore déjà les résultats de [9] (où $\delta(3) = \frac{2}{3}$ et $\delta(d) = \frac{d-3}{2}$ pour $d \geq 4$; mais il faut remarquer, de nouveau, que dans [9] il n'y a pas de restriction sur le bord).

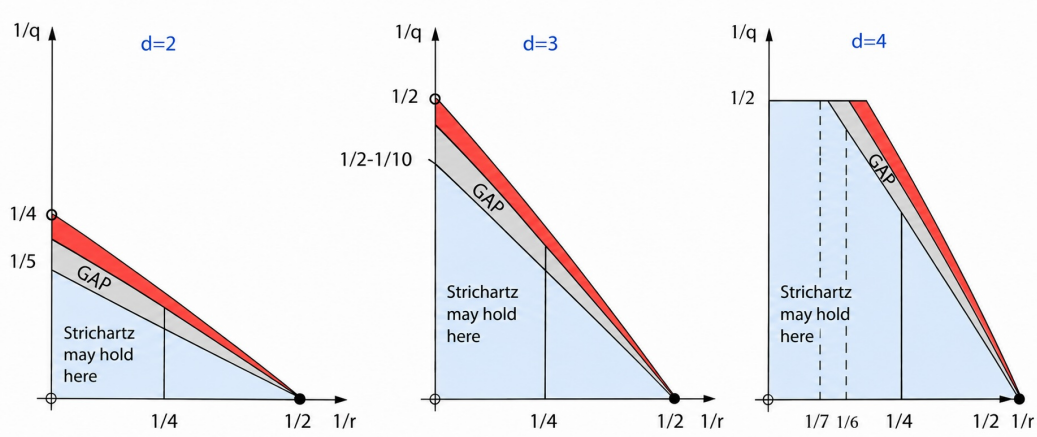
Pour démontrer ce phénomène, nous raffinons considérablement la paramétrice construite dans [OI7] puis développée dans [OI13]. Nous montrons que les queues d'aronde responsables de la perte maximale sont confinées dans des intervalles de temps extrêmement courts. En dehors de ces intervalles, les solutions présentent un comportement nettement plus dispersif. Une décomposition supplémentaire suivant l'angle d'incidence permet alors d'exploiter cette localisation temporelle et d'obtenir des estimations de Strichartz sensiblement meilleures que celles issues de l'argument TT^* classique.

New counter-examples to Strichartz estimates for the wave equation on a $2D$ model convex domain

avec Gilles Lebeau et Fabrice Planchon, J.Ecole Polytechnique (2021) [OI10]

Cette analyse permet également de revisiter la question de l'optimalité. Dans [OI10], nous utilisons la même paramétrice pour construire une nouvelle famille de contre-exemples, qui améliore sensiblement ceux que j'avais obtenus auparavant dans [OI4, OI6] : la région des exposants admissibles est encore réduite et la restriction artificielle sur certains exposants disparaît. Plus précisément, la plage des paires admissibles est maintenant restreinte car $\gamma(d) > \frac{1}{12}$ est remplacée par $\gamma(d) > \frac{1}{10}$, alors que la restriction $r > 4$ de [OI4, OI6] a été éliminée - ce qui induit des contre-exemples en toute dimension et non pas seulement en dimension $d \leq 4$ comme c'était le cas avant. Les résultats positifs et négatifs deviennent ainsi beaucoup plus proches l'un de l'autre et donnent une image *presque* complète du problème dans le modèle de Friedlander.

Au-delà des estimations de Strichartz elles-mêmes, ces travaux montrent que la paramétrice développée pour l'étude de la dispersion constitue un outil beaucoup plus général. Elle fournit une description quantitative de la propagation des singularités près du bord, bien plus fine que celle donnée par les théorèmes classiques de propagation des singularités, et ouvre la voie à des résultats qui étaient jusqu'alors hors de portée.



État actuel du problème : Les travaux [OI11] et [OI10] rapprochent considérablement les résultats positifs (bleu) et les contre-exemples (rouge). Il ne subsiste plus qu'une région (grise), où la validité des estimations de Strichartz reste ouverte ; cet écart diminue lorsque la dimension augmente.

2.4 Ondes dans un domaine convexe avec condition de Neumann au bord

Les travaux que je mène actuellement avec Diego Sánchez Sanz visent à obtenir des estimations dispersives optimales pour l'équation des ondes avec condition de Neumann dans un domaine strictement convexe générique. Alors que le cas de Dirichlet a pu être résolu dans [OI13], aucune théorie analogue n'existe aujourd'hui pour les conditions de Neumann. Deux ingrédients essentiels font défaut : une paramétrice de type Melrose-Taylor adaptée aux réflexions de Neumann et une théorie des quasimodes de galerie dans ce contexte. Leur construction constitue l'objectif principal de ce programme.

Dispersive estimates for the wave equation inside generic strictly convex domains
with Neumann boundary condition

avec Diego Sánchez Sanz, article en préparation (2026)

Diego Sánchez Sanz, qui vient de soutenir sa thèse et a rejoint mon équipe en tant que post-doctorant, apporte à ce projet une expertise particulièrement précieuse. Sa thèse [56] a permis de résoudre le problème pour un domaine modèle de type Friedlander, où la géométrie est suffisamment explicite pour construire directement le propagateur et adapter les arguments du cas de Dirichlet aux conditions de Robin et de Neumann. Il y a notamment développé de nouveaux outils d'analyse des intégrales oscillantes partiellement dégénérées ainsi qu'une étude fine des fonctions d'Airy intervenant dans ce contexte. Notre objectif est désormais de franchir l'étape décisive consistant à transposer ces méthodes au cadre d'un domaine strictement convexe quelconque, où aucune paramétrice analogue à celle de Melrose-Taylor n'est connue pour les conditions de Neumann. Ce problème constitue une étape essentielle vers une théorie dispersive complète des problèmes aux limites de Neumann sur des domaines convexes et devrait conduire à des estimations de Strichartz optimales dans ce cadre.

3 Equation de Schrödinger dans un domaine strictement convexe

L'obtention d'estimations dispersives et de Strichartz optimales pour l'équation de Schrödinger dans un domaine à bord constitue depuis longtemps une question centrale de l'analyse des EDP. Au-delà de leur intérêt intrinsèque, ces estimations jouent un rôle déterminant dans l'étude des équations de Schrödinger non linéaires sur les domaines bornés, notamment pour le problème cubique en dimension trois.

Dans [OI12] j'obtiens des estimations de dispersion optimales pour le flot de Schrödinger semi-classique dans un domaine modèle strictement convexe. Elles conduisent à des estimations de Strichartz avec une perte

de $1/4$ de dérivée, suffisamment fortes pour adapter au cadre à bord les arguments de Burq-Gérard-Tzvetkov [14] et de Planchon-Tzvetkov-Visciglia [54]. On obtient ainsi, pour l'équation cubique défocalisante en dimension trois, un résultat d'existence globale et de bien-posé comparable à celui connu sur les variétés compactes génériques sans bord. Ces questions étaient restées essentiellement ouvertes depuis le début des années 2000.

La principale difficulté nouvelle par rapport à l'équation des ondes provient du fait que les composantes fréquentielles d'une solution de Schrödinger ne se propagent pas toutes à la même vitesse. Après plusieurs réflexions sur le bord, un très grand nombre de paquets d'ondes issus de réflexions différentes peuvent ainsi coexister au même instant et interférer. Le contrôle de cette superposition constitue l'une des principales difficultés de l'analyse.

Les estimations optimales de Strichartz restent largement ouvertes pour des domaines généraux. On ignore notamment si une perte observée au niveau semi-classique entraîne nécessairement une perte pour les estimations classiques dans un domaine extérieur non captant. La difficulté vient du fait qu'un paquet d'ondes peut traverser trop rapidement la région de focalisation pour produire une obstruction visible après sommation sur les échelles de temps classiques. Nous reviendrons sur cette question dans la section ??.

Dispersive estimates for the semi-classical Schrödinger equation inside strictly convex domains

Annales de l'Institut Henri Poincaré (2023) [OI12]

On considère dans la suite l'équation de Schrödinger semi-classique dans (Ω_d, g_F) , où g_F désigne la métrique héritée de l'opérateur Δ_F introduit précédemment

$$ih\partial_t v + h^2 \Delta_F v = 0, \quad v|_{t=0} = \psi(hD_y) \delta_{x=a, y=0}, \quad v|_{\mathbb{R} \times \partial\Omega} = 0. \quad (3.1)$$

Le résultat principal que j'ai récemment obtenu dans [OI12] s'énonce comme suit :

Théorème 8. ([OI12]) *Let $\psi \in C_0^\infty([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$, $0 \leq \psi \leq 1$. Il existe des constantes $C(d) > 0$, $1 > T_0 > 0$ et $1 > a_0 > 0$ telles que pour tout $a \in (0, a_0]$, $h \in (0, 1)$ et $|t| \in (h, T_0]$, la solution $v(t, \cdot)$ de (3.1) avec donnée $v_0(x, y) = \psi(hD_y) \delta_{x=a, y=0}$ vérifie*

$$\|\psi(hD_t)v(t, x, y)\|_{L^\infty(\Omega_d)} \lesssim \frac{1}{h^d} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{(d-1)}{2} + \frac{1}{4}}. \quad (3.2)$$

De plus, pour tout $|t| \in (\sqrt{a}, T_0]$ et tout $|t|h^{1/3} \ll a \leq a_0$, ces bornes sont saturées, et on a

$$\|\psi(hD_t)v(t, x, y)\|_{L^\infty(\Omega_d)} \sim \frac{a^{\frac{1}{4}}}{h^d} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{\frac{(d-1)}{2} + \frac{1}{4}}. \quad (3.3)$$

La preuve repose sur deux représentations complémentaires de la solution, chacune adaptée à un régime géométrique différent. Au voisinage immédiat du bord, la solution est décrite en termes de modes de galerie, c'est-à-dire d'ondes qui restent confinées dans une couche très mince le long de la frontière. Cette représentation est particulièrement efficace lorsque les réflexions deviennent extrêmement nombreuses et que les phénomènes de focalisation dominent la propagation.

Précisément, dans le cas de Schrödinger semi-classique on obtient, à partir la décomposition spectrale (2.2), une paramétrice pour (3.1) qui s'écrit sous la forme suivante: $G_{S,h} = \sum_{\max\{h^{2/3}, a\} \leq \gamma < 1} G_{S,h,\gamma}$, où

$$G_{S,h,\gamma}(t, x, a, y) = \sum_{k \sim \gamma^{3/2}/h} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} e^{iht\lambda_k(\eta/h)} e^{iy\eta/h} \psi(\eta) e_k(x, \eta/h) e_k(a, \eta/h) d\eta. \quad (3.4)$$

Ici γ , comme dans le cas des ondes, est un petit paramètre et la situation la plus délicate correspond à $\gamma \sim a$ (en effet, si $\gamma = a = x$, les deux facteurs d'Airy e_k ont des points critiques dégénérés). Pour un mode de galerie

fixé on observe déjà une perte de $1/6$ dans les estimations dispersives. Lorsque $k \gg 1$, une estimation terme à terme de la représentation spectrale ne peut donc conduire à la borne optimale.

Dans ce régime ($k \gg 1$) l'application de la formule de Poisson transforme la représentation (3.1) en une somme d'intégrales oscillantes indexée par le nombre de réflexions au bord. Lorsque le point d'observation reste suffisamment éloigné de la frontière, ces intégrales décrivent une superposition de paquets d'ondes correspondant aux différentes réflexions successives. Bien que leur nombre puisse devenir très important, des estimations fines des intégrales oscillantes permettent de contrôler leur interférence et d'obtenir les estimations dispersives optimales.

Les estimations obtenues dans le Théorème 8 sont suffisamment fortes pour établir les estimations de Strichartz avec une perte d'un quart de dérivée, ce qui permet d'adapter au cadre des domaines à bord les méthodes développées pour les variétés sans bord. On obtient ainsi le caractère bien posé global de l'équation cubique défocalisante dans le domaine modèle tridimensionnel, qu'on va décrire dans la suite.

Application aux inégalités de Strichartz L'obtention des estimations dispersives optimales du Théorème 8 permet d'en déduire des estimations de Strichartz semi-classiques par la méthode TT^* . L'objectif initial de ce programme était précisément de comprendre les pertes optimales dans ces inégalités, en vue d'applications aux équations de Schrödinger non linéaires. Lors de nos premiers travaux sur les ondes, nous avons conjecturé (avec Daniel Tataru) que la perte optimale devrait être de $1/6$ de dérivée, valeur correspondant aux modes de galerie. La preuve des estimations dispersives obtenue dans [OI12] permet de faire un premier pas important vers cette conjecture (suivi par le travail plus récent [OI17] décrit dans la section 3.2). Même si on n'est toujours pas en mesure de répondre à la question d'optimalité concernant les estimations de Strichartz, le Théorème 8 conduit au résultat suivant :

Théorème 9. ([OI12, Théorème 2]) Soit (q, r) une paire Schrödinger-admissible en dimension $d \geq 2$ avec $\frac{1}{q} \leq \left(\frac{d}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$, et soit $s = \frac{d}{2} - \frac{2}{q} - \frac{d}{r}$, alors la solution v to (3.1) avec donnée v_0 vérifie

$$\|\psi(hD_t)v\|_{L^q([0, T_0], L^r(\Omega_d))} \lesssim h^{-s} \|v_0\|_{L^2(\Omega_d)}. \quad (3.5)$$

Le Théorème 9 améliore sensiblement les meilleurs résultats connus. En dimension deux, la paire limite $(3, \infty)$ obtenue dans [8] est remplacée par $(8/3, \infty)$, ce qui correspond à une perte de seulement $1/4$ de dérivée. Plus généralement, en toute dimension, le point limite est significativement rapproché de la conjecture optimale.

Le Théorème 9 ne clôt cependant pas la question des estimations de Strichartz optimales. Alors que, pour l'équation des ondes, la perte de dispersion n'apparaît qu'à des instants isolés correspondant à des configurations géométriques particulières, le phénomène est beaucoup moins localisé en temps pour Schrödinger. Dans le régime critique, les deux représentations de la solution - par réflexions successives ou par modes de galerie - conduisent simultanément à sommer un très grand nombre de contributions, sans qu'aucune des deux approches ne permette d'améliorer les estimations. Ces deux descriptions sont en effet duales : elles font intervenir le même nombre de terme lorsque $k \sim h^{-1/4}$, ce qui correspond à une distance initiale au bord $a \sim h^{1/2}$. C'est précisément dans ce régime que les pertes obtenues sont les plus importantes.

Des travaux plus récents montrent néanmoins que la perte de $1/4$ n'est pas optimale, ni pour les estimations de Strichartz, ni pour les estimations dispersives sur une très large plage de temps, au-delà du régime de saturation décrit par (3.3). J'ai ainsi obtenu dans [OI17] une perte strictement inférieure à $1/4$ et formulé la conjecture selon laquelle la perte optimale devrait être $1/6 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Cette valeur de $1/6$ n'est pas arbitraire : elle est exactement celle que l'on obtient en considérant la propagation d'un seul mode de galerie, qui représente la configuration géométrique la plus concentrée au voisinage du bord. Une preuve de la conjecture de Lindelöf entraînerait immédiatement cette perte optimale (voir section 3.2), établissant ainsi un lien remarquable entre un problème classique de théorie analytique des nombres et les estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger.

Applications aux problèmes non linéaires Les estimations de Strichartz précédentes ont également des conséquences importantes pour les problèmes non linéaires. Elles permettent d'adapter au cadre d'un domaine à bord deux stratégies développées pour les variétés sans bord : l'argument de Burq-Gérard-Tzvetkov [14] pour l'existence globale de l'équation cubique défocalisante en dimension trois, et la méthode d'énergie modifiée de Planchon-Tzvetkov-Visciglia [54] pour contrôler la croissance des normes de Sobolev supérieures.

L'ingrédient déterminant est que nos estimations de Strichartz fournissent une paire $(2, q)$ avec $q < \infty$ - ici $q = 10$ - alors que les estimations antérieures de Blair-Smith-Sogge ne donnaient que le cas $q = \infty$. Cette amélioration suffit pour adapter l'argument de Yudovich utilisé dans [14].

On considère l'équation de Schrödinger cubique sur une variété (Ω, g) avec un bord modèle strictement convexe:

$$-i\partial_t v + \Delta_g v = \kappa |v|^2 v, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad v|_{\mathbb{R} \times \partial\Omega} = 0, \quad (3.6)$$

où Δ_g désigne l'opérateur de Laplace avec condition de Dirichlet au bord, et où $\kappa = \pm 1$ (équation non-linéaire cubique défocalisante ou focalisante).

Théorème 10. ([OI12, Théorème 3]) Soit $d = 3$ et $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Il existe une unique solution globale $v \in C_t(H_0^1(\Omega))$ de (3.6) avec $\kappa = 1$ (équation défocalisante), et son énergie est conservée le long du flot. Pour $\kappa = -1$ (équation focalisante), le même résultat reste vrai localement en temps, et globalement en temps si $\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)}$ est suffisamment petite.

De plus, comme dans le cas sans bord, on peut adapter l'approche de Planchon-Tzvetkov-Vega pour démontrer la croissance exponentielle de la norme H^m de la solution, où $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Théorème 11. ([OI12, Théorème 4]) Soit $d = 3$ et $v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega)$ avec $s > 1$. La solution v du Theorem 10 est $C_t(H^s(\Omega))$, et pour $s = m \in \mathbb{N}$, sa norme croît de manière exponentielle au plus : il existe une constante $C = C(m, \|v_0\|_{H^m(\Omega)})$ telle que

$$\|v(t)\|_{H^m(\Omega)} \leq C \exp(Ct). \quad (3.7)$$

Ainsi, dans le domaine modèle tridimensionnel, la théorie de Cauchy de l'équation cubique défocalisante atteint désormais le même niveau que sur une variété compacte générique sans bord : existence globale au niveau de l'énergie, unicité et contrôle des normes de Sobolev supérieures. Nous conjecturons que ces résultats restent valables sur toute variété compacte tridimensionnelle à bord strictement convexe.

3.1 Généralisations de ces résultats au cas d'un domaine convexe générique

Dans un travail en cours de finalisation, mené en collaboration avec Fabrice Planchon, nous étendons au cadre d'un domaine strictement convexe quelconque l'ensemble des résultats dispersifs précédemment obtenus pour l'équation de Schrödinger avec condition de Dirichlet. Ce travail généralise ainsi au cadre géométrique le plus naturel les résultats connus jusqu'alors uniquement dans des domaines modèles. La construction de la paramétrice combine deux ingrédients complémentaires : d'une part, une adaptation au cas général de la représentation explicite (3.4) obtenue dans le modèle de Friedlander et, d'autre part, l'analyse géométrique développée pour l'équation des ondes dans notre travail précédent [OI13]. Lorsque la donnée initiale est située à une distance suffisante du bord, la propagation peut être contrôlée par une analyse microlocale des réflexions successives. En revanche, au voisinage immédiat de la frontière, les phénomènes de concentration imposent de recourir aux quasimodes de type *whispering gallery* construits dans notre article sur les ondes [OI13], qui constituent un ingrédient essentiel de la preuve. Cette combinaison de techniques permet d'obtenir les estimations dispersives optimales dans un domaine convexe générique. Les applications aux équations de Schrödinger non linéaires découlent ensuite, comme dans le cas des domaines modèles, des estimations de Strichartz obtenues par l'argument TT^* .

Dispersive estimates for the semi-classical Schrödinger equation inside generic convex domains
and applications to the cubic NLS

avec Fabrice Planchon, article en fin de rédaction (2026)

3.2 Equation de Schrödinger semi-classique $1D$ sur la demi-droite avec potentiel linéaire : modèle du quantum bouncing ball et sommes exponentielles

Dans un travail très récent [OI17], à paraître dans Journal of Spectral Theory, j'ai étudié l'équation de Schrödinger semi-classique sur la demi-droite soumise à un potentiel linéaire et à une condition de Dirichlet, modèle connu en physique sous le nom de *quantum bouncing ball*. Bien que ce problème soit unidimensionnel, il constitue un modèle fondamental pour comprendre la propagation des ondes de Schrödinger à l'intérieur des domaines strictement convexes de dimension supérieure, où la présence du bord engendre des pertes de dispersion dont le mécanisme précis restait jusqu'à présent mal compris.

Strichartz and dispersive estimates for quantum bouncing ball model :
exponential sums and Van de Corput methods in 1d semi-classical Schrödinger equations
<https://arxiv.org/pdf/2510.01779> à paraître (2026)

L'objectif principal est d'améliorer les estimations dispersives et les estimations de Strichartz semi-classiques obtenues auparavant pour le modèle de Friedlander dans [OI12], dans lesquelles apparaît une perte de $1/4$ de dérivée. Nous montrons que cette perte de $1/4$, bien qu'optimale pour certaines estimations ponctuelles en temps, n'est atteinte qu'à des instants très particuliers correspondant à des phénomènes de focalisation après réflexion sur le bord. Cette concentration n'étant réalisée que sur de courts intervalles de temps, son effet est atténué après intégration en temps, ce qui permet d'obtenir des estimations de Strichartz sensiblement meilleures.

L'analyse repose sur une étude très fine de la décomposition spectrale du problème, exprimée à l'aide des fonctions d'Airy. Après normalisation appropriée des variables, le noyau de Green est ramené à l'étude de sommes exponentielles oscillantes dont les phases présentent une géométrie particulièrement délicate. La contribution dominante provient des modes presque tangents au bord, responsables des pertes de dispersion observées dans les domaines convexes.

L'apport méthodologique essentiel de ce travail consiste à appliquer systématiquement les *tests de dérivées* de Van der Corput aux sommes exponentielles intervenant dans cette représentation spectrale. Selon les différents régimes asymptotiques, des tests portant sur les dérivées seconde, troisième ou quatrième des phases permettent d'exploiter les oscillations et d'obtenir des annulations qui ne peuvent être mises en évidence par les estimations classiques obtenues en sommant les valeurs absolues des termes. Cette approche conduit à une amélioration quantitative des estimations dispersives (à temps fixé) dans tous les régimes où la perte optimale de $1/4$ n'est pas effectivement réalisée.

Ces nouvelles estimations dispersives permettent ensuite, via un argument TT^* complété par une analyse précise des courts intervalles de temps où apparaissent les phénomènes de focalisation, d'améliorer les estimations de Strichartz. Nous obtenons ainsi une perte strictement inférieure à $1/4$, égale à $\frac{1}{6} + \frac{5}{114}$, ce qui constitue, à notre connaissance, la meilleure borne actuellement disponible pour ce modèle. Le travail montre également que cette perte provient essentiellement des limites actuelles des estimations de sommes exponentielles : sous des hypothèses naturelles de type Lindelöf sur ces sommes, on obtiendrait une perte de seulement $1/6 + \varepsilon$, qui est conjecturée optimale et correspond à la borne inférieure déjà connue par des contre-exemples construits à partir des modes de galerie.

Au-delà du cas unidimensionnel, ce travail met en évidence que les pertes de dispersion observées dans les domaines strictement convexes sont essentiellement déterminées par la dynamique dans la direction normale au bord. Les méthodes développées ici fournissent ainsi un cadre analytique susceptible d'être transposé au modèle de Friedlander, puis plus généralement aux domaines convexes de dimension supérieure, où l'étude des variables tangentielles constitue désormais le principal obstacle technique.

3.3 Autres problèmes abordés récemment

Une part importante de mon activité de recherche au cours des deux dernières années a également porté sur une question de théorie analytique des nombres étroitement liée au problème précédent : l'estimation de certaines

sommes exponentielles oscillantes. Cette question intervient directement dans la recherche des estimations dispersives optimales pour l'équation de Schrödinger semi-classique sur la demi-droite.

Nous en décrivons ici très brièvement le contexte : l'hypothèse de *Lindelöf* est une conjecture due à E.L.Lindelöf sur le taux de croissance de la fonction zeta de Riemann sur la droite critique $Re(x) = 1/2$. Les méthodes qui lui sont liées conduisent plus généralement à étudier des sommes exponentielles de la forme $\sum_{k \sim \lambda} e^{iTf(k/\lambda)}$, où f est une fonction réelle, bornée, suffisamment régulière sur un intervalle contenant $[1, 2]$ (en général on prend $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$; $f(x) = \log(x)$ correspond à Riemann) et où λ, T sont de "grands" paramètres ($T \gg \lambda$). Dans les régimes qui nous intéressent, une borne de type

$$\left| \sum_{k \sim \lambda} e^{iTf(k/\lambda)} \right| \lesssim CT^\epsilon \lambda^{1/2}, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (3.8)$$

jouerait le rôle d'une estimation optimale de type Lindelöf. Les meilleurs résultats généraux actuellement disponibles correspondent à un exposant $\epsilon > \frac{13}{84} = \frac{1}{6} - \frac{1}{84}$, issu notamment des travaux de Bourgain [7], dans la continuité de ceux de Bombieri-Iwaniec [5], Huxley-Kolesnik [27], Huxley [28, 29], etc.

Une telle estimation (3.8) valable pour tout $\epsilon > 0$ traduirait l'existence de fortes annulations dans ces sommes oscillantes, annulations qui se répercuteraient directement sur les estimations dispersives obtenues par décomposition spectrale. Si (3.8) était vrai pour tout $\epsilon > 0$, on pourrait espérer obtenir des bornes bien meilleures pour les ondes dans des domaines compacts (en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur de Laplace). Une question naturelle est alors de savoir si l'étude des estimations dispersives optimales pour le modèle du Friedlander permettrait d'identifier une classe de fonctions f pour lesquelles (3.8) serait vraie pour tout $\epsilon > 0$.

Pour le modèle unidimensionnel du quantum bouncing ball de la section précédente 3.2, l'obtention d'estimations dispersives optimales conduit précisément à une somme de ce type, avec une phase asymptotiquement liée à $f(x) = x^{2/3}$. En effet, la décomposition spectrale fait intervenir les zéros $(-\omega_k)_k$ de la fonction d'Airy dont l'asymptotique ramène le problème à l'étude de sommes exponentielles de la forme (3.8). Ainsi, l'amélioration des estimations dispersives est directement liée à la qualité des annulations que l'on peut obtenir dans ces sommes.

References

- [1] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *S.I.A.M. Journal of Control and Optimization*, (305):1024–1065, 1992.
- [2] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nicolay Tzvetkov. On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 21(3):295–318, 2004
- [3] Nicolas Burq, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Global existence for energy critical waves in 3D domains. *J. Amer. Math. Soc.* 21(3):831–845, 2008
- [4] N Burq, A. Hassel, and C. Guillarmou. Strichartz estimates without loss on manifolds with hyperbolic trapped geodesics. *G.A.F.A.* (20):617–656, 2010
- [5] E. Bombieri and H. Iwaniec. On the order of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci* 4(13):449–472, 1986
- [6] E. Bombieri and H. Iwaniec. Some mean value theorems for exponential sums. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci* 4(13):473–486, 1986
- [7] Jean Bourgain. Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function *Journal Amer. Math. Soc.* 30(1), 2017

- [8] Matthew D. Blair, Hart F. Smith, and Christopher D. Sogge. On Strichartz estimates for Schrödinger operators in compact manifolds with boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(1):247–256 (electronic), 2008.
- [9] Matthew D. Blair, Hart F. Smith, and Christopher D. Sogge. Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary. *Ann.Inst.H.Poincaré, Anal.Non Linéaire*, 26:1817–1829, 2009.
- [10] Matthew D. Blair, Hart F. Smith, and Christopher D. Sogge. Strichartz estimates and the nonlinear Schrödinger equation in exterior domains *Math. Annalen*, 354(4):1397–1430, 2012
- [11] Nicolas Burq. Smoothing effect for Schrödinger boundary value problems. *Duke Math. J.*, 123(2):403–427, 2004.
- [12] Nicolas Burq. Estimations de Strichartz pour des perturbations à longue portée de l’opérateur de Schrödinger. *Séminaire: Equations aux Dérivées Partielles. 2001?2002, Sémin. Equ. Dériv. Partielles. Ecole Polytech., Palaiseau*, 2002.
- [13] Nicolas Burq and Fabrice Planchon. Global existence for energy critical waves in 3D domains : Neumann boundary conditions. *Amer.J.Math.* 131(6): 1715–1742, 2009
- [14] Nicolas. Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov, *Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds*, *Amer. J. Math.*, 126(3):569–605, 2004
- [15] Thierry Cazenave and Fred B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal.*, 14(10):807–836, 1990.
- [16] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$. *Ann. of Math. (2)* 167(3):767–865, 2008
- [17] Peter Constantin and Jean-Claude Saut. Local smoothing properties of Schrödinger equations. *Indiana Univ.Math.J* 38(3):791–810, 1989
- [18] Shin-ichi Doi. Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds. *Duke Math.J.* 82(3):679–706, 1996
- [19] B. Dehman and G. Lebeau Analysis of the HUM Control operator and Exact Controllability for Semilinear Waves in uniform time *SIAM Journal on Control and Optimisation* 48(2):521–550, 2009
- [20] T. Duyckaers and D. Lafontaine Scattering for critical radial Neumann waves outside a ball. *Rev.Mat.Iberoam.* 38 no.2 : 659-703, 2022
- [21] Isabelle Gallagher and Patrick Gérard. Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(1):1–49, 2001
- [22] J. Ginibre and G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(4):309–327, 1985.
- [23] J. Ginibre and G. Velo. Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations. *Comm. Math. Phys.*, 144(1):163–188, 1992.
- [24] J. Ginibre and G. Velo. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. In *Partial differential operators and mathematical physics (Holzhau, 1994)*, volume 78 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 153–160. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [25] Daniel Grieser L^p bounds for eigenfunctions and spectral projections of the Laplacian near concave boundaries [Thèse UCLA](#)
- [26] Thierry Hargé and Gilles Lebeau. Diffraction par un convexe. *Invent. Math.*, 118(1):161–196, 1994.

- [27] M.N. Huxley and G. Koleskin. Exponential sums and the Riemann zeta function III *Proc. London Math. Soc.* (3)62(3):449–468, 1991
- [28] M.N. Huxley. Exponential sums and the Riemann zeta function IV *Proc. London Math. Soc.* (3)66(1):1–4, 1993
- [29] M.N. Huxley. Exponential sums and the Riemann zeta function *Proc. London Math. Soc.* (3)90(1):1–41, 2005
- [OI16] Felice Iandoli and Oana Ivanovici Dispersive estimates for the wave equation outside a cylinder in $\mathbb{R}^3$. *Journal Functional Analysis*, 286, no.9, 50 pages, 2024
- [OI17] Oana Ivanovici Strichartz and dispersive estimates for quantum bouncing ball model : exponential sums and Van de Corput methods in 1d semi-classical Schrödinger equations <https://arxiv.org/pdf/2510.01779>, à paraître.
- [OI1] Oana Ivanovici. Precise smoothing effect in the exterior of balls. *Asymptot. Anal.*, 53(4):189–208, 2007.
- [OI2] Oana Ivanovici. On the Schrödinger equation outside strictly convex obstacles. *Anal. PDE*, 3(3):261–293, 2010.
- [OI3] Oana Ivanovici and Fabrice Planchon. On the energy critical Schrödinger equation in 3D non-trapping domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 27(5):1153–1177, 2010.
- [OI4] Oana Ivanovici. Counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation in domains. *Math. Ann.*, 347(3):627–673, 2010.
- [OI5] O. Ivanovici and F. Planchon. Square function and heat flow estimates on domains. *Comm. Partial Differential Equations*, 42(9):1447–1466, 2017.
- [OI6] Oana Ivanovici. Counterexamples to the Strichartz inequalities for the wave equation in general domains with boundary. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(5):1357–1388, 2012.
- [OI7] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains I: the Friedlander model case. *Ann. of Math. (2)*, 180(1):323–380, 2014.
- [OI8] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Estimations de Strichartz pour l’équation des ondes dans un domaine strictement convexe. In *PDE’s, dispersion, scattering theory and control theory*, volume 30 of *Sémin. Congr.*, pages 69–79. Soc. Math. France, Paris, 2017.
- [OI9] Oana Ivanovici and Gilles Lebeau. Dispersion for the wave and the Schrödinger equations outside strictly convex obstacles and counterexamples. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(7):774–779, 2017.
- [OI10] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. New counterexamples to Strichartz estimates for the wave equation on a 2D model convex domain. *Journal de l’Ecole Polytechnique - Mathématiques*, 8:1133-1157, 2021
- [OI11] Oana Ivanovici, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Strichartz estimates for the wave equation inside strictly convex 2D model domain. *Journal of Differential equations*, vol. 300, p. 83–880, 2021
- [OI12] Oana Ivanovici. Dispersive estimates for the Schrödinger equation inside strictly convex domains and applications *Annales IHP Anal. Non Linéaire* 40(2023), no.4, p.830-850
- [OI13] Oana Ivanovici, Richard Lascar, Gilles Lebeau, and Fabrice Planchon. Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains II: the general case. *Annals PDE* 9(2023), no.2, paper no.14, 117 pages
- [OI14] Oana Ivanovici. Long time dispersive estimates for the wave and Klein-Gordon equations inside strictly convex domains. *Discrete Continuous Dyn. Syst.*, 41(12), 5707-5742, 2021

- [OI15] Oana Ivanovici. Dispersion estimates for the wave and Schrödinger equations outside a ball and counterexamples. [arXiv:2012.08366](#), à paraître.
- [30] J.L. Journé, A. Soffer, and C. Sogge. Decay estimates for Schrödinger operators. *Comm. Pure Appl. Math.* 44(5):573–604, 1991.
- [31] Lev Kapitanski. Global and unique weak solutions of nonlinear wave equations. *Math. Res. Lett.*, 1(2):211–223, 1994.
- [32] Tosio Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 46(1):113–129, 1987.
- [33] Markus Keel and Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5):955–980, 1998.
- [34] Joseph B. Keller. Geometrical Theory of Diffraction. *J. of the Optical Soc. of America*, 52(2):116–130, 1962.
- [35] Rowan Killip, Monica Visan, and Xiaoyi Zhang. Quintic NLS in the exterior of a strictly convex obstacle. *Amer. J. Math.*, 138(5):1193–1346, 2016.
- [36] David Lafontaine. Strichartz estimates without loss outside two strictly convex obstacles preprint [arXiv:1709.03836](#), 2017
- [37] David Lafontaine. About the wave equation outside two strictly convex obstacles preprint [arXiv:1711.09734](#), 2022, Comm.P.D.E.47 no.5: 875–911, 2022
- [38] David Lafontaine. Strichartz estimates without loss outside many strictly convex obstacles preprint [arXiv:1811.12357](#), 2019
- [39] G. Lebeau. Régularité Gevrey 3 pour la diffraction. *Comm. PDE*, 9(15):1437–1494, 1984.
- [40] G. Lebeau. Contrôle de l’équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(3):267–291, 1992.
- [41] Dong Li, Hart Smith, and Xiaoyi Zhang. Global well-posedness and scattering for defocusing energy-critical NLS in the exterior of balls with radial data. *Math. Res. Lett.*, 19(1):213–232, 2012.
- [42] Hans Lindblad and Christopher D. Sogge. On existence and scattering with minimal regularity for semi-linear wave equations. *J. Funct. Anal.*, 130(2):357–426, 1995.
- [43] Len Meas. Dispersive estimates for the wave equation inside cylindrical convex domains : a model case. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(2):161–165, 2017.
- [44] R. B. Melrose. Equivalence of glancing hypersurfaces. *Invent. Math.*, 37(3):165–191, 1976.
- [45] R. B. Melrose. Singularities and energy decay in acoustical scattering. *Duke Mathematical Journal*, 46(1):43–59, 1979.
- [46] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(5):593–617, 1978.
- [47] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(2):129–168, 1982.
- [48] Richard B. Melrose and Michael E. Taylor. Near peak scattering and the corrected Kirchhoff approximation for a convex obstacle. *Adv. in Math.*, 55(3):242–315, 1985.
- [49] Richard B. Melrose and Michael E. Taylor. The radiation pattern of a diffracted wave near the shadow boundary. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(6):599–672, 1986.

- [50] Richard B. Melrose and Michael E. Taylor. Boundary problems for the wave equations with grazing and gliding rays, 1987.
- [51] Cathleen S. Morawetz. Time decay for the nonlinear Klein-Gordon equations. *Proc. Roy. Soc. Ser. A* 306:291–296, 1968
- [52] Cathleen S. Morawetz, James V. Ralston, and Walter A. Strauss. Decay of solutions of the wave equation outside non-trapping obstacles. *Comm. Pure Appl. Math.* 30(4):447–508, 1977
- [53] A. Müller and A. Seeger. Sharp L^p -bounds for the wave equation on groups of Heisenberg type. *Analysis and PDE* 8(5):1051–1100, 2015
- [54] Fabrice Planchon, Nikolai Tzvetkov and Nicola Visciglia. On the growth of Sobolev norms for NLS on 2 and 3 dimensional manifolds. *Anal. PDE*(10), no.5:1123–1147, 2017.
- [55] Fabrice Planchon and Luis Vega. Bilinear virial identities and applications. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(2):261–290, 2009.
- [56] Diego Sánchez Sanz Dispersion for the wave equation with Robin boundary conditions on a 2D convex model domain [Thèse de doctorat, 2026](#)
- [57] Per Sjölin. Regularity of solutions to the Schrödinger equation. *Duke Math. J* 55(3):699–715, 1987
- [58] Hart F. Smith. A parametrix construction for wave equations with $C^{1,1}$ coefficients. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(3):797–835, 1998.
- [59] Hart F. Smith. Spectral cluster estimates for $C^{1,1}$ metrics. *Amer. J. Math.*, 128(5):1069–1103, 2006.
- [60] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. L^p regularity for the wave equation with strictly convex obstacles. *Duke Math. J.*, 73(1):97–153, 1994.
- [61] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. On the critical semilinear wave equation outside strictly convex obstacles. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(4):879–916, 1995.
- [62] Hart F. Smith and Christopher D. Sogge. On the L^p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary. *Acta Math.*, 198(1):107–153, 2007.
- [63] Robert S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977.
- [64] Daniel Tataru. Strichartz estimates for second order hyperbolic operators with nonsmooth coefficients. III. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):419–442 (electronic), 2002.
- [65] Gigliola Staffilani and Daniel Tataru. Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients. *Comm. Partial Differential Equations* 27(7-8):1337–1372, 2002
- [66] Luis Vega. Schrödinger equations: pointwise convergence to the initial data. *Proc. Amer. Math. Soc.* 102(4):874–878, 1988
- [67] Maciej Zworski. High frequency scattering by a convex obstacle. *Duke Math. J.*, 61(2):545–634, 1990.
- [68] Chengbin Xu, Tengfei Zhao and Jiqiang Zheng. Scattering for 3d cubic focusing NLS on the domain outside a convex obstacle revisited *Acta Math. Sin.* 38 no.3, paper no.44, 2022